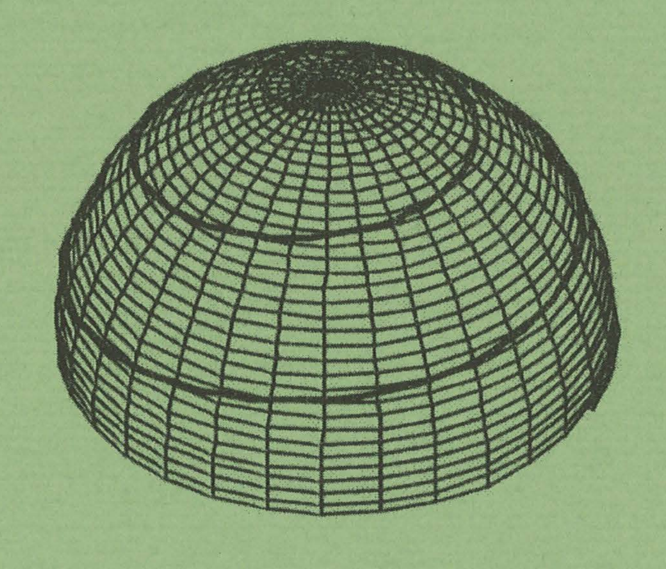
INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE

por

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE

por

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Integrales de línea y de superficie.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Daniel Álvarez Morcillo.
CUADERNO 105.01
ISBN: 84-95365-89-9
Depósito Legal: M-10643-2001

0 - Campos escalares y vectoriales

Definición. Llamaremos respectivamente *campo escalar* y *campo vectorial* en un dominio D de $\boldsymbol{R}^n$, a sendas funciones (en general de clase al menos C^1)

$$f : D \to \boldsymbol{R}, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{F} : D \to \boldsymbol{R}^n .$$

Es evidente, en el segundo caso, que las funciones reales coordenadas de $\boldsymbol{F}$, F_1, $F_2, \cdots, F_n$, son cada una un campo escalar.

En lo que sigue consideraremos campos en $\boldsymbol{R}^3$ o en $\boldsymbol{R}^2$.

Gradiente

Recordemos, con nuestro lenguaje actual, algo que ya sabemos de funciones de varias variables.

Definición. Dado un campo escalar f en $\boldsymbol{R}^3$, o en $\boldsymbol{R}^2$, llamamos *gradiente* de f, ∇f, a los campos vectoriales

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \text{ ó } \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

respectivamente. Es obvio que si f es C^k, ∇f es C^{k-1}.

Rotacional

Definición. Dado un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{R}^3$, llamamos *rotacional* de $\boldsymbol{F}$, ***rotF***, al campo vectorial

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Si definimos el *operador formal nabla* como el *vector* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, podemos expresar el rotacional como *producto vectorial* de nabla y $\boldsymbol{F}$, así:

$$rot\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix},$$

lo que resulta de gran valor mnemotécnico (***i***, ***j*** y ***k*** son los vectores de la base canónica de $\boldsymbol{R}^3$, (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1)).

Físicamente, el rotacional puede interpretarse según el ejemplo siguiente: si un cuerpo rígido gira alrededor de un eje y la velocidad lineal, tangencial, de cada punto es ***v***, entonces rot ***v*** es un vector paralelo al eje, de sentido dado por la *regla del sacacorchos*, y de módulo doble al de la velocidad angular del sólido.

Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial en $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$, podemos considerarlo como la restricción a $\boldsymbol{R}^2$ del campo $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, 0)$; su rotacional es entonces

$$rot\boldsymbol{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Lo mismo que en el caso del gradiente, si $\boldsymbol{F}$ es C^k, $rot\boldsymbol{F}$ es C^{k-1}.

Si $rot\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ se dice que $\boldsymbol{F}$ es un campo *irrotacional.*

Campos conservativos

Definición. Si, dado un campo vectorial $\boldsymbol{F}$, existe un campo escalar f tal que

$$\boldsymbol{F} = \nabla f,$$

decimos que $\boldsymbol{F}$ es un *campo conservativo*. A la función f se la llama *función potencial*, y de $\boldsymbol{F}$ se dice también que es un *campo que deriva de un potencial escalar f.*

Sea f una función de $\boldsymbol{R}^2$ en $\boldsymbol{R}^2$ de clase al menos C^2; su gradiente será

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

y el rotacional de éste, según lo que acabamos de ver,

$$rot\nabla f = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = (0,0,0),$$

en virtud de la simetría de las derivadas mixtas, cuando son continuas.

Si f fuera una función de clase C^2 de $\boldsymbol{R}^3$ en $\boldsymbol{R}^3$, tendríamos

$$rot\nabla f = \nabla\times(\nabla f)=\nabla\times\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=(0,0,0),$$

lo mismo que antes.

Pues bien, se demuestra que se verifican también las propiedades recíprocas tanto en $\boldsymbol{R}^2$ como en $\boldsymbol{R}^3$; es decir, tenemos el siguiente

Teorema. Un campo vectorial es conservativo si y sólo si es irrotacional.

Ejemplo. El *campo gravitatorio terrestre*, al que se ve sometida una masa m en un punto de coordenadas (x,y,z) en un sistema de origen el centro de la Tierra,

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(-\frac{mMG}{r^3}x,-\frac{mMG}{r^3}y,-\frac{mMG}{r^3}z\right),$$

donde M es la masa del planeta, G la constante gravitacional y $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, es obviamente un campo conservativo, derivado, por ejemplo, del potencial

$$f(x,y,z)=\frac{mMG}{r}\ .$$

Divergencia

Definición. Dado un campo vectorial $\boldsymbol{F}$, llamamos *divergencia* de $\boldsymbol{F}$, $div\boldsymbol{F}$, al campo escalar

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

O bien, utilizando el operador nabla, podemos expresar la divergencia como *producto escalar* de nabla y $\boldsymbol{F}$, así:

$$div\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}\ .$$

Podemos tener una imagen intuitiva de lo que la divergencia significa con un ejemplo físico. Si $\boldsymbol{F}$ es el campo de la velocidad de movimiento de un gas, entonces $div\boldsymbol{F}$ es la tasa de expansión – *flujo* - por

unidad de volumen de dicho gas. Si es, por ejemplo, $F(x,y,z)=2x+2y+2z$, será $div\,F(x,y,z)=6$ en cualquier punto, es decir, el gas se está expandiendo a razón de 6 unidades cúbicas por unidad de volumen en cada unidad de tiempo.

Si $div\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ se dice que $\boldsymbol{F}$ es un campo *incompresible*.

Se comprueba sin dificultad, lo mismo que más arriba, que

$$div\,rot\boldsymbol{F}=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=0\,,$$

por la simetría de las derivadas mixtas cuando son continuas. Y se demuestra también el recíproco: un campo es el rotacional de otro si su divergencia es nula. Es decir:

Teorema. Un campo vectorial es el rotacional de otro (o, como también se dice, es un campo derivado de un potencial vector) si y sólo si su divergencia es nula (si y sólo si es incompresible).

I - Integrales de línea

Integrales de trayectoria

Definición. Llamamos *trayectoria* en $\boldsymbol{R}^n$ a una función

$$\sigma : I = [a,b] \to \boldsymbol{R}^n ;$$

si σ es diferenciable, diremos que la trayectoria también lo es, y si σ es de clase C^1, diremos que se trata de una trayectoria de clase C^1; a la imagen $\sigma(I)$ la llamaremos *curva* C de la trayectoria.

Si σ es diferenciable, la derivada $\sigma'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sigma(t+h)-\sigma(t)}{h}$ es por definición, como sabemos, el vector tangente a la trayectoria en el punto $\sigma(t)$.

Caso de un campo escalar

Definición. Supongamos que tenemos una *trayectoria* de clase C^1 en $\boldsymbol{R}^3$, es decir, una función

$$\begin{aligned} \sigma : I = [a,b] &\to \boldsymbol{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)), \end{aligned}$$

de clase C^1, y un campo escalar

$$f : D \to \boldsymbol{R}$$

tal que

$$\sigma(I) \subset D \subset \boldsymbol{R}^3$$

y que la función compuesta

$$\begin{aligned} f \circ \sigma : I &\to \boldsymbol{R} \\ t &\mapsto f(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

sea continua en I; entonces se llama *integral de f a lo largo de la trayectoria* σ, a

$$\int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt =$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\ ,$$

con las notaciones

$$\int_\sigma f\, ds\,,\ \text{ó}\ \int_\sigma f(x, y, z)\, ds\,.$$

Si σ es C^1, o $f \circ \sigma$ continua, sólo *a trozos*, definiremos la integral dividiendo I en tramos sobre cada uno de los cuales $f \circ \sigma \,.\, \|\sigma'\|$ sea continua y sumando las respectivas integrales.

Ejemplo

Sea la trayectoria $\sigma : [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^3, t \mapsto (t\,cos\,t, t\,sen\,t, t)$, y $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$. Tendremos

$$f(\sigma(t)) = t^3, \qquad \|\sigma'(t)\| = \sqrt{2 + t^2}\ ,$$

es decir,

$$\int_\sigma f\, ds = \int_0^{2\pi} t^3\, \sqrt{2 + t^2}\, dt = \frac{8}{15}\left((6\pi^4 + \pi^2 - 1)\sqrt{4\pi^2 + 2} + \sqrt{2}\right) \cong 2038{,}74$$

(integración por partes, por ejemplo).

Si la trayectoria define una curva *plana*, suponiéndola en el plano *OXY* σ será una función $t \mapsto (x(t), y(t))$ y f una función de dos variables, con lo que la integral será

$$\int_\sigma f\, ds = \int_a^b f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\, dt = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt =$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{dx^2 + dy^2}\,.$$

Caso de un campo vectorial

Definición. Supongamos que tenemos un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ sobre un dominio D y una trayectoria $\sigma : I = [a, b] \to \boldsymbol{R}^3$ (o $\boldsymbol{R}^2$), de clase C^1, y tal que $\boldsymbol{F}$ sea una función continua sobre $\sigma(I)$. Llamamos *integral de* $\boldsymbol{F}$ *a lo largo de la trayectoria* σ a la integral sobre I del producto escalar de $\boldsymbol{F}$ y σ':

$$\int_\sigma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_a^b \boldsymbol{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt\,.$$

Es claro que, según las hipótesis, $(\boldsymbol{F}\circ\sigma)\cdot\sigma'$ es continua, pero la definición se extendería de la forma habitual al caso en que fuera sólo continua a trozos.

Ejemplo 1

Sea la trayectoria $\sigma(t)=(r\,cos\,t,\,r\,sen\,t,\,ht)$, $t\in[0,2\pi]$ (cuya curva es un arco de *hélice* de radio r y paso $2\pi h$), y $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(z,x,y)$. Tenemos:

$$\int_\sigma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_0^{2\pi}(ht,r\,cos\,t,r\,sen\,t)\cdot(-r\,sen\,t,r\,cos\,t,h)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-hrt\,sen\,t+r^2cos^2t+hr\,sen\,t\right)dt=\pi r(2h+r)$$

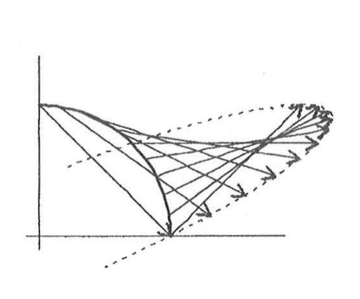
(identidad $cos^2 t=\dfrac{1+cos\,2t}{2}$ e integración por partes).

Ejemplo 2

Sea ahora la integral de línea del campo vectorial $\boldsymbol{F}$, en $\boldsymbol{R}^2$,

$$\boldsymbol{F}(x,y)=(x+y,\,x-y),$$

sobre la trayectoria



$$\sigma(t)=(r\,cos\,t,r\,sen\,t),\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];$$

$$\int_\sigma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r(cos\,t+sen\,t,cos\,t-sen\,t)\cdot r(-sen\,t,cos\,t)\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2(cos\,2t-sen\,2t)\,dt=r^2\left[\frac{sen\,2t+cos\,2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-r^2\,.$$

Generalidades sobre curvas

Lo que hasta aquí hemos denominado *trayectoria*, es decir, una aplicación $\sigma\colon I\to\boldsymbol{R}^3$ de clase C^1 (quizá a trozos), es en realidad lo que se llama una **parametrización** de la **curva** imagen $C=\sigma(I)$; pero no es la única.

Sea $h\colon J\to I$ un *homeomorfismo* de clase C^1 entre dos intervalos, y $\sigma\colon I\to\boldsymbol{R}^3$ una trayectoria de clase C^1. Queda entonces definida una aplicación $\rho=\sigma\circ h\colon J\to\boldsymbol{R}^3$, según el esquema

$$J \xrightarrow{h} I \xrightarrow{\sigma} \boldsymbol{R}^3 \qquad J \xrightarrow{\rho=\sigma\circ h} \boldsymbol{R}^3$$
$$s \mapsto t \mapsto (x,y,z) \qquad s \mapsto (x,y,z)$$

verificándose naturalmente la igualdad de las imágenes: $C = \sigma(I) = \rho(J)$.

Definición. Se dice que la aplicación

$$\rho = \sigma \circ h : J \to \boldsymbol{R}^3$$

es **otra parametrización** de la misma curva C. Si h es creciente, decimos que σ y ρ son *del mismo sentido*, o que se conserva la **orientación**; si es decreciente, que son de *sentidos opuestos*, o que se invierte la *orientación*.

(En rigor, los homeomorfismos entre intervalos, como el h, definen una relación de equivalencia en el conjunto de los pares tales como (I, σ), (J, ρ) ... La *curva* sería entonces, propiamente, una *clase de equivalencia* en este conjunto.)

Ejemplo

$$t \mapsto (\cos t,\ sen\, t),\ t \in [0,\pi],$$
$$t \mapsto (\cos(\pi - t),\ sen(\pi - t)),\ t \in [0,\pi],$$
$$t \mapsto (\cos \pi t^2,\ sen\, \pi t^2),\ t \in [0,1],$$
$$t \mapsto \left(t, \sqrt{1-t^2}\right),\ t \in [-1,1]$$

son cuatro parametrizaciones distintas, de sentidos alternativos, de la semicircunferencia de centro (0,0) y radio 1 en el semiplano $y \geq 0$.

Si comparamos la segunda parametrización con la primera, encontramos algo que podemos generalizar. Dada una parametrización de una curva, $\sigma : [a,b] \to \boldsymbol{R}^3$, la nueva parametrización $t \mapsto \sigma(a+b-t),\ t \in [a,b]$ se limita a invertir la orientación de la anterior (el homeomorfismo h es la función $t \mapsto a+b-t$), con un cambio de sentido del vector tangente ($h'(u) = -1$): se la llama la parametrización *opuesta*, σ_{op}.

Es frecuente que una parametrización de una curva se dé así:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I;$$

a estas expresiones se las llama, como sabemos, *ecuaciones paramétricas* de la curva.

Definición. Un punto de una trayectoria C^1 es **ordinario** si el vector tangente en él no es nulo, y **singular** en caso contrario.

Para extender esta definición a las *curvas*, necesitamos que esta propiedad se conserve al cambiar de parametrización, para lo que es necesario y basta, según la regla de la

cadena, que el homeomorfismo h de más arriba entre los intervalos J e I sea tal que su derivada no se anule (o, dicho de otro modo, que h^{-1} sea también C^1), ya que entonces, al ser $\rho' = \sigma' \circ h \cdot h'$, ρ' y σ' sólo podrán anularse simultáneamente. Con esta restricción (que daremos por supuesta en adelante, salvo que se diga otra cosa), la singularidad o regularidad de un punto no dependerá de la parametrización elegida. Además, es obvio que los vectores tangentes correspondientes a distintas parametrizaciones tendrán la misma dirección (aunque el sentido variará con la orientación), puesto que, para cada valor de $t = h(u)$, $\rho'(t) = \sigma'(h(u))\, h'(u)$, donde $h'(u)$ es un escalar (número real).

Definición. Llamaremos **regular** a una curva cuyos puntos sean todos ordinarios.

Definición. Llamaremos **recta tangente** a una curva en un punto (ordinario), a la determinada por dicho punto y el vector tangente en él: es decir, paramétricamente, a la recta

$$\left(\sigma(t) + \lambda\sigma'(t)\right), \quad \lambda \in \boldsymbol{R}.$$

Podemos tener una útil imagen *cinemática* de todo esto. Cada parametrización de una curva es la forma en que un punto móvil la recorre; el vector tangente es el *vector velocidad*; la norma de éste, la magnitud escalar de dicha velocidad. Si dos parametrizaciones distintas son del mismo sentido, los dos recorridos tienen los mismos origen y final, pero distinta velocidad; si son de sentidos opuestos, el origen y el final se invierten. Así, en el ejemplo anterior los *vectores velocidad* respectivos (en la figura se dibujan algunos) son:

$$\left(-sen\,t,\, cos\,t\right),$$
$$\left(sen(\pi - t),\, -cos(\pi - t)\right) = \left(sen\,t,\, cos\,t\right),$$
$$2\pi t\left(-sen\,\pi t^2,\, cos\,\pi t^2\right),$$
$$\left(1,\, -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right).$$

(Obsérvese que, en la última parametrización, la velocidad *se hace infinita* en los extremos.)

Definición. Decimos que una curva es **simple** si sus parametrizaciones son *biyectivas* (es evidente que si una, σ, lo es, las demás, $\rho = \sigma \circ h$, donde h es biyectiva, lo son también). La biyectividad supone, intuitivamente, que la curva *no se corta* a sí misma.

Si son $P = \sigma(a)$ y $Q = \sigma(b)$ los *extremos* de C, podemos considerar ésta como dirigida de P a Q o de Q a P; C con un sentido de dirección es entonces una curva **simple orientada**.

Definición. Decimos que una curva es **cerrada** si se verifica que $\sigma(a) = \sigma(b)$, siendo σ una parametrización cualquiera y a y b los extremos del intervalo.

Naturalmente, una curva C puede ser *simple* y *cerrada*, en cuyo caso seguirá teniendo dos orientaciones, correspondientes a las dos direcciones posibles en que podemos recorrerla (obsérvese que en estas curvas cada parametrización es biyectiva en el

interior del intervalo correspondiente I, pero *no en sus extremos*, puesto que $\sigma(a) = \sigma(b)$).

Trayectoria, orientación e integral

Teorema. Sean σ y ρ dos parametrizaciones de la misma curva, y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial definido en ella. Entonces, si σ y ρ tienen el mismo sentido, se verifica que

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_\rho \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} \ ;$$

si tienen sentidos opuestos, en cambio,

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_\rho \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} \ .$$

Demostración. Como sabemos, existe un homeomorfismo h entre dos intervalos, $I = [a,b]$ y $J = [c,d]$, tal que $\rho = \sigma \circ h$. Derivando,

$$\rho' = \sigma' \circ h \cdot h' ,$$

y

$$\int_\rho \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \left[\boldsymbol{F}(\sigma(h(t))) \cdot \sigma'(h(t)) \right] h'(t)\, dt \,.$$

Y haciendo el cambio $h(t) = u$,

$$\int_\rho \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{h(a)}^{h(b)} \boldsymbol{F}(\sigma(u)) \cdot \sigma'(u)\, du = \begin{cases} \int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} & \text{si } h(a) = c,\ h(b) = d, \\ -\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} & \text{si } h(a) = d,\ h(b) = c, \end{cases}$$

es decir, según que σ y ρ tengan la misma u opuesta orientación. ■

Ejemplo

Retomemos el *Ejemplo 1* de la página 7, pero con la parametrización opuesta para la hélice: $t \mapsto (r\cos t, -r \,\mathrm{sen}\, t, h(2\pi - t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Será:

$$\int_{\sigma_{op}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_0^{2\pi} \left(h(2\pi - t), r\cos t, -r\,\mathrm{sen}\, t \right) \cdot \left(-r\,\mathrm{sen}\, t, -r\cos t, -h \right) dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(-hr(2\pi - t)\,\mathrm{sen}\, t - r^2 \cos^2 t + hr\,\mathrm{sen}\, t \right) dt = -\pi r(2h + r) \,.$$

En el caso de un campo escalar, en cambio, la orientación es indiferente.

Teorema. Si son σ y ρ dos parametrizaciones cualesquiera de una curva, y f un campo escalar definido en ella, se verifica siempre que

$$\int_\sigma f\, ds = \int_\rho f\, ds .$$

La demostración sería análoga a la del teorema anterior; ahora, si los sentidos de las parametrizaciones fueran opuestos, al hacer el cambio de variable cambiaría el orden de los extremos de integración, pero como

$$\|\rho'(t)\| = \|\sigma'(h(t))\|\,|h'(t)| = \begin{cases} \|\sigma'(h(t))\|\, h'(t) & \text{si } h \text{ creciente,} \\ \|\sigma'(h(t))\|\,(-h'(t)) & \text{si } h \text{ decreciente,} \end{cases}$$

cambiaría también el signo de *du*. ■

Puede comprobarse volviendo al *Ejemplo* de la página 6 y tomando la parametrización σ_{op} opuesta a la allí usada, es decir,

$$t \mapsto \big((2\pi - t)\cos t, -(2\pi - t)\,\mathrm{sen}\, t, 2\pi - t\big);$$

se obtiene

$$\int_{\sigma_{op}} f\, ds = \int_0^{2\pi} (2\pi - t)^3 \sqrt{2 + (2\pi - t)^2}\, dt = \int_{2\pi}^{0} u^3 \sqrt{2 + u^2}\, (-du) = \int_\sigma f\, ds .$$

Integrales de línea

Hasta ahora hemos definido integrales de trayectoria, es decir, definidas para una *parametrización* de una curva. Pero los últimos teoremas vistos nos permiten definirlas respecto de las *curvas* mismas y quizá de su *orientación*, con independencia de la parametrización elegida.

Definición. Sea C una *curva simple* y σ una parametrización cualquiera de C. *Si* f es un campo escalar como en la definición de la página 1, llamamos a $\int_\sigma f\, ds$ *integral de* f *a lo largo de* C, con las notaciones

$$\int_C f\, ds, \quad \text{o simplemente} \quad \int_C f .$$

Definición. Sea C una *curva simple orientada* y σ una parametrización cualquiera de C *que preserve su orientación.* Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial como en la definición de la página 1, llamamos a $\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$ *integral de línea de* $\boldsymbol{F}$ *a lo largo de* C (o también, *circulación del vector* $\boldsymbol{F}$ *a lo largo de* C), con las notaciones

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}\,, \quad \text{o simplemente} \quad \int_C \boldsymbol{F}\,.$$

Es decir, estos conceptos no dependen de la parametrización elegida (podemos elegir libremente la que necesitamos para calcular el valor de la integral), sino sólo de la curva, y en el segundo caso, de la orientación de ésta. En realidad, una vez elegido arbitrariamente un sentido positivo, existirán dos integrales de valores opuestos,

$$\int_{C+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} \quad \text{e} \quad \int_{C-} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}\,.$$

Así, en el *Ejemplo 1* de la página 7 hemos calculado $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$, siendo $\boldsymbol{F}$ el campo allí definido y C un período de hélice de radio r y paso $2\pi h$, *con la orientación dada por la variación de t.*

Naturalmente, si el campo es $f(x,y,z)=1$, lo que obtenemos es la *longitud* de la curva.

Es frecuente, en la integral curvilínea de un campo vectorial, utilizar la notación

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz\,,$$

donde F_1, F_2 y F_3 son las coordenadas de $\boldsymbol{F}$ (a la expresión $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ se la llama *forma diferencial*).

Caso de campos conservativos

Teorema. Sea $f: D \to \boldsymbol{R}$ un campo escalar C^1 y $\sigma: I=[a,b] \to \boldsymbol{R}^3$ una parametrización, también C^1, de una curva $C \subset D \subset \boldsymbol{R}^3$. Entonces

$$\int_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{s} = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

(lo que supone una generalización de la fórmula de Barrow).

Demostración. Recordando la regla de la cadena,

$$\int_C \nabla f\cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \nabla f(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt = \int_a^b \big(f_x'(x(t),y(t),z(t))x'(t) + f_y'(x(t),y(t),z(t))y'(t) +$$

$$+ f_z'(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\big)dt = \int_a^b (f\circ\sigma)'(t) = [f\circ\sigma]_a^b = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))\,. \blacksquare$$

Esto significa que, en este caso, el valor de la integral ni siquiera depende de la curva, sino sólo de sus extremos, $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$. Y si la curva es *cerrada*, es decir, $\sigma(a)=\sigma(b)$, la integral es nula.

Ejemplo 1

Consideremos de nuevo el *Ejemplo 2* de la página 7:

$$\int_\sigma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy,$$

donde

$$\sigma(t) = (r\cos t, r\,sen\,t),\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

se trata de un campo conservativo, pues

$$\frac{\partial(x+y)}{\partial y} = \frac{\partial(x-y)}{\partial x} = 1,$$

y el potencial f habrá de ser tal que

$$f(x,y) = \int (x+y)\,dx = \frac{x^2}{2} + x\,y + \varphi(y), \quad \text{con} \quad f'_y(x,y) = x + \varphi'(y) = x - y,$$

es decir,

$$\varphi'(y) = -y, \quad \varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + k\,,$$

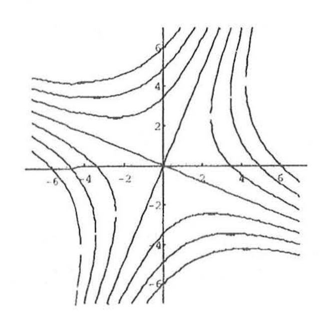
y finalmente

$$f(x,y) = \frac{x^2 + 2x\,y - y^2}{2} + k,$$

siendo k una constante arbitraria (podemos elegir el potencial de infinitas maneras distintas, como la primitiva de una función); y la integral valdrá (cualquiera que sea k)

$$\int_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = f(0,r) - f(r,0) = \frac{-r^2 - r^2}{2} = -r^2\,,$$

que es el valor que habíamos encontrado allí.



Se llama *curva equipotencial* al lugar geométrico de los puntos de igual potencia. En este ejemplo las curvas equipotenciales serán las hipérbolas

$$x^2 + 2xy - y^2 = cte\,,$$

indicadas en la figura. Según lo que hemos dicho, la integral

de un campo conservativo, $\int_C f$, dependerá sólo de las curvas equipotenciales en las que estén situados los puntos inicial y final de C.

Ejemplo 2

Sea ahora, en $\boldsymbol{R}^3$,

$$\int_C (x+2y+3z)\,dx+(2x+3y+z)\,dy+(3x+y+2z)\,dz,$$

con C parametrizada por

$$\sigma(t)=\left(2t^2-1,2t,-t^3+1\right),\ t\in[0,2].$$

Es fácil comprobar que se trata de un campo gradiente (es decir, que su rotacional es el vector nulo). Calculemos su potencial:

$$f(x,y,z)=\int(x+2y+3z)\,dx=\frac{x^2}{2}+2yx+3zx+\varphi(y,z),$$

$$f'_y(x,y,z)=2x+3y+z=2x+\varphi'_y(y,z),\quad \varphi'_y(y,z)=3y+z,$$

$$\varphi(y,z)=\int(3y+z)\,dy=\frac{3y^2}{2}+zy+\psi(z),$$

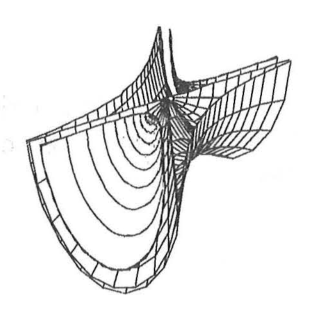
$$f'_z(x,y,z)=3x+y+2z=3x+y+\psi'(z),\quad \psi'(z)=2z,\quad \psi(z)=z^2+k,$$

y finalmente

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+z^2+2xy+3xz+yz+k,$$

siendo k una constante arbitraria. Como los puntos inicial y final de la trayectoria son $\sigma(0)=(-1{,}0{,}1)$ y $\sigma(2)=(7,4,-7)$, el valor de la integral será

$$f(7{,}4{,}-7)-f(-1{,}0{,}1)=-\frac{43}{2}+\frac{3}{2}=-20.$$



Las *superficies equipotenciales* son ahora los hiperboloides

$$\frac{x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+z^2+2xy+3xz+yz=cte.$$

Observación. Si la integral no depende de la curva, sino sólo de los puntos inicial y final, otra forma de simplificar el

cálculo puede ser integrar a lo largo de otra curva más sencilla entre los mismos puntos, como por ejemplo un segmento de recta. Consideremos nuevamente los dos ejemplos anteriores.

Ejemplo 1

El segmento de extremos $(r,0)$ y $(0,r)$ es el $(1-\lambda)(r,0)+\lambda(0,r)=((1-\lambda)r,\lambda r)$, $\lambda \in [0,1]$, con lo que $x+y=r$, $x-y=r(1-2\lambda)$, $dx=-r\,d\lambda$, $dy=r\,d\lambda$ y la integral es

$$\int_{C}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_0^1\left(-r^2+r^2(1-2\lambda)\right)d\lambda=\int_0^1-2r^2\lambda\,d\lambda=\left[-r^2\lambda^2\right]_0^1=-r^2 .$$

Ejemplo 2

Ahora, el segmento de extremos $(-1,0,1)$ y $(7,4,-7)$ es $(8\lambda-1,4\lambda,-8\lambda+1)$, $\lambda\in[0,1]$, y la integral resulta ser

$$\int_0^1\left(8(-8\lambda+2)+4(20\lambda-1)-8(12\lambda-1)\right)d\lambda=\int_0^1(-80\lambda+20)d\lambda=\left[-40\lambda^2+20\lambda\right]_0^1=-20 .$$

En ambos casos esta vía de cálculo ha resultado ser mucho más sencilla.

Componente tangencial

Si consideramos el *vector tangente unitario* de la curva,

$$T(t)=\frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|},$$

podemos expresar la integral del campo vectorial F así:

$$\int_\sigma F\cdot ds=\int_a^b\left(F(\sigma(t))\cdot T(t)\right)\|\sigma'(t)\|dt=\int_\sigma f\,ds,$$

donde f es el campo escalar $F\cdot T$, es decir, la *componente tangencial* de F, o proyección del vector $F(x,y,z)$ sobre $\sigma'(t)$. Así, la integral de un campo vectorial se reduce a la de un campo escalar, la componente tangencial de aquél. Naturalmente, como el sentido del vector T depende de la orientación de la curva, al cambiar ésta f se convertirá en $-f$ y el signo de la integral cambia.

Aplicaciones: campos de fuerzas y trabajo

Recordando el concepto elemental de trabajo realizado por una fuerza, lo que acabamos de decir sobre la componente tangencial hace natural que, si el campo vectorial F es un *campo de fuerzas* (el gravitatorio, por ejemplo), su integral a lo largo de una curva sea, por definición, el *trabajo* realizado por una masa unidad al recorrerla.

Ejemplo

Sean el campo de fuerzas

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(4\sqrt[3]{x z^4}, 4\sqrt[3]{y^5}, 4\sqrt[3]{x^4 z}\right),\quad (x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3,$$

y la curva parametrizada por

$$\sigma(t)=\left(t\cos t, t^{\frac{4}{3}}\operatorname{sen} t, t^{\frac{2}{3}}\right),\quad t\in[0,2\pi];$$

calculemos el trabajo realizado por una masa unidad al recorrer la curva en el sentido de t creciente. Un sencillo cálculo nos muestra que

$$rot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0},$$

es decir, que $\boldsymbol{F}$ es conservativo; el trabajo será, por tanto, el mismo realizado al pasar del punto original de la curva al final en línea recta. Como

$$\sigma(0)=(0,0,0),\quad \sigma(2\pi)=\left(2\pi,0,(2\pi)^{\frac{2}{3}}\right),$$

dicho camino recto será

$$\left(2\pi\lambda, 0, (2\pi)^{\frac{2}{3}}\lambda\right),\quad \lambda\in[0,1];$$

el trabajo será entonces

$$T=\int_0^1\left(4\sqrt[3]{2\pi\lambda(2\pi)^{\frac{8}{3}}\lambda^4}, 0, 4\sqrt[3]{2^4\pi^4\lambda^4(2\pi)^{\frac{2}{3}}\lambda}\right)\cdot\left(2\pi, 0, (2\pi)^{\frac{2}{3}}\right)d\lambda=$$

$$=\int_0^1\left(32\sqrt[9]{4\pi^2}\,\pi^2\lambda^{\frac{5}{3}}\right)d\lambda=\left[12\sqrt[9]{4\pi^2}\,\pi^2\lambda^{\frac{8}{3}}\right]_0^1=12\sqrt[9]{4\pi^2}\,\pi^2.$$

Otras aplicaciones: longitudes, áreas, masas, momentos, centros de masas

Como ya hemos dicho, si consideramos el campo escalar unitario, $f(x,y,z)=1$, la integral del mismo a lo largo de una curva será la longitud de ésta. Si el campo escalar es la densidad $m(x,y,z)$ (de un *cable*, o una pieza *unidimensional*), la masa de éste será la integral de aquélla a lo largo de su curva directriz,

$$M=\int_C m(x,y,z)\,ds.$$

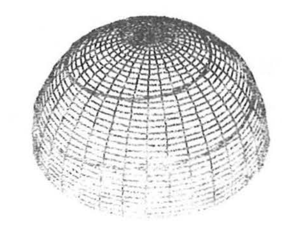
Y a partir de esto último podemos definir, de la manera obvia, el momento de inercia respecto de un eje e,

$$I_e = \int_C d_e(x,y,z)^2\, m(x,y,z)\, ds\,,$$

y el centro de masas, $G = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$,

$$\overline{x} = \frac{\int_C x\, m(x,y,z)\, ds}{M}, \quad \overline{y} = \frac{\int_C y\, m(x,y,z)\, ds}{M}, \quad \overline{z} = \frac{\int_C z\, m(x,y,z)\, ds}{M}.$$

Ejemplo 1



Sea la curva (contenida en una esfera: ver figura)

$$\sigma(t) = (\cos 12t\, \mathrm{sen}\, t, -\mathrm{sen}\, 12t\, \mathrm{sen}\, t, \cos t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

y el campo (densidad)

$$m(x,y,z) = 30\sqrt{x^2+y^2}\, z\,;$$

calculemos la masa:

$$\sigma'(t) = (-12\,\mathrm{sen}\, 12t\, \mathrm{sen}\, t + \cos 12t \cos t, -12 \cos 12t\, \mathrm{sen}\, t - \mathrm{sen}\, 12t \cos t, -\mathrm{sen}\, t),$$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{144\, \mathrm{sen}^2 t + 1}\,; \quad m^*(t) = 30\, \mathrm{sen}\, t \cos t\,;$$

$$M = \int_C m(x,y,z)\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 30\, \mathrm{sen}\, t \cos t \sqrt{144\, \mathrm{sen}^2 t + 1}\, dt =$$

$$= \left[\frac{5}{72}(144\, \mathrm{sen}^2 t + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\left(145^{3/2} - 1\right)}{72} \cong 121{,}18\,.$$

Ejemplo 2

Calculemos el momento de inercia respecto del eje de simetría, y el centro de masas, de una semicircunferencia de radio R y densidad constante. La parametrización más simple es

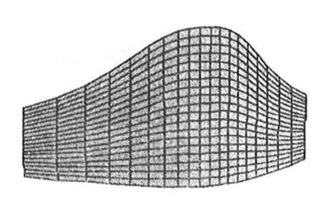
$$\sigma(t) = (R \cos t,\ R\, \mathrm{sen}\, t), \ t \in [0, \pi]\,; \quad ds = R\, dt\,, \quad l = \pi R\,;$$

$$I_y = \int_0^{\pi} R^3 \cos^2 t\, dt = R^3 \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = R^3 \left[\frac{t}{2} + \frac{\mathrm{sen}\, 2t}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi R^3}{2}\,;$$

por simetría, $\overline{x} = 0$;

$$\overline{y} = \frac{\int_0^{\pi} R^2\, sen\, t\, dt}{\pi R} = \frac{2}{\pi} R\,; \qquad G = \left(0, \frac{2}{\pi} R\right).$$

Si la curva es plana, un campo escalar f a lo largo de la misma puede interpretarse como una altura, con lo cual la integral es el límite de una suma de áreas de *rectángulos* de base ds y altura $f(x,y)$, es decir, es el área de una superficie cilíndrica de directriz la curva y generatrices "verticales" de longitud dada por f. O, como caso concreto, el *área* de un *muro* de *planta* la curva y altura $f(x,y)$ en cada punto.



Ejemplo 3

Calcular el área de un muro cuya planta es el arco de la hipérbola $x^2 - y^2 = 25$ entre los puntos $(15, 10\sqrt{2})$ y $(15, -10\sqrt{2})$, y cuya altura en cada punto es $h(x,y) = \frac{70\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2}$ (longitudes en metros).

La trayectoria es

$$\sigma(t) = (5cht, 5sht), \quad t \in [-arg\, ch3, arg\, ch3] = [-2log(1+\sqrt{2}), 2log(1+\sqrt{2})],$$

y la altura del muro en función del parámetro,

$$h(t) = \frac{14\sqrt{ch^2t + sh^2t}}{ch^2t}.$$

Con ello tenemos:

$$\|\sigma'(t)\| = 5\sqrt{sh^2t + ch^2t}\,, \quad A = 70\int_{-2log(1+\sqrt{2})}^{2log(1+\sqrt{2})} \frac{sh^2t + ch^2t}{ch^2t} dt =$$

$$= 70[2t - tht]_{-2log(1+\sqrt{2})}^{2log(1+\sqrt{2})} = 140\left(4log(1+\sqrt{2}) - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cong 361{,}58\ \mathrm{m}^2.$$

Teorema de Green

Relaciona una integral doble sobre una región del plano encerrada por una curva, con una integral de línea a lo largo de dicha curva.

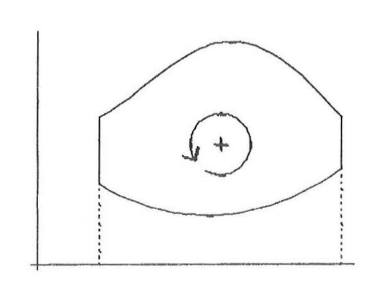
Teorema. Sea $D \subset \boldsymbol{R}^2$ una región elemental de tipo 3, ∂D su frontera orientada en sentido positivo y $\boldsymbol{F} = (P,Q)$ un campo vectorial C^1 en D. Entonces

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

Demostración

Sea D una región elemental de tipo 1, es decir,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$



donde φ_1 y φ_2 son de clase C^1, con su frontera ∂D orientada positivamente en el sentido contrario a las agujas de un reloj; y sea

$$(x, y) \mapsto P(x, y)$$

una función (o campo escalar) de clase C^1 en D. Tenemos:

$$\int_{\partial D} P(x, y)\, dx = \int_a^b \big(P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x)) \big)\, dx,$$

ya que la integral a lo largo de los tramos rectos paralelos al eje OY es nula por ser x constante; y por otro lado,

$$\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\, dx = \int_a^b \big(P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x)) \big)\, dx,$$

por el teorema fundamental del cálculo; luego

$$\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = -\int_{\partial D} P(x, y)\, dx.$$

De forma análoga probaríamos que, si D es una región elemental de tipo 2,

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

con ψ_1 y ψ_2 de clase C^1, y

$$(x, y) \mapsto Q(x, y)$$

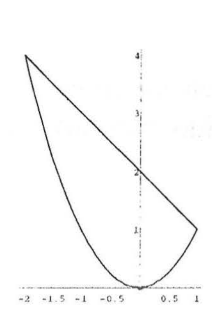
una función también C^1, entonces

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = \int_{\partial D} Q(x, y)\, dy.$$

Y si es D una región elemental de tipo 3, sumando las dos expresiones obtenidas resulta el teorema. ■

Naturalmente, el teorema de Green puede extenderse a dominios elementales del plano, es decir, dominios formados por la unión de un número finito de regiones de tipo 3, disjuntas dos a dos o con intersecciones de área nula.

Ejemplo



Sea $F(x,y,z)=(y-x, x^2y, 0)$, y D la región encerrada por las curvas $y=2-x$ e $y=x^2$. Calculemos las dos integrales que aparecen en el teorema.

Integral doble:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2xy-1,\ \int_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x}(2xy-1)\,dydx=$$

$$=\int_{-2}^{1}\left[xy^2-y\right]_{y=x^2}^{y=2-x}=\int_{-2}^{1}\left(x(2-x)^2-(2-x)-x^5+x^2\right)dx=$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(-2+5x-3x^2+x^3-x^5\right)dx=\left[-2x+\frac{5x^2}{2}-x^3+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_{-2}^{1}=-\frac{63}{4}.$$

Integral de línea:

i) a lo largo de $y=x^2$ de izquierda a derecha,

$$\int_{-2}^{1}Pdx+Qdy=\int_{-2}^{1}\left(x^2-x+2x^5\right)dx=\left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{3}\right]_{-2}^{1}=-\frac{33}{2};$$

ii) a lo largo de $y=2-x$ de derecha a izquierda,

$$\int_{1}^{-2}Pdx+Qdy=\int_{1}^{-2}\left(2-2x-2x^2+x^3\right)dx=\left[2x-x^2-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_{1}^{-2}=\frac{3}{4};$$

$$\int_{\partial S}P\,dx+Q\,dy=-\frac{33}{2}+\frac{3}{4}=-\frac{63}{4}.$$

El teorema de Green puede enunciarse también en forma vectorial, así:

Teorema. Si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial en $\Omega\subset\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$, $D\subset\boldsymbol{R}^2$ una región elemental de tipo 3 incluida en Ω ($D\times\{0\}\subset\Omega$) y ∂D su frontera orientada en sentido positivo, entonces

$$\int_D rot\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{k}\, dA = \int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s};$$

es decir, *la integral de la componente normal del rotacional de un campo* ***F*** *en una región plana D es igual a la circulación de* ***F*** *a lo largo de la frontera de D.*

Área de una región plana

El teorema de Green puede aplicarse al cálculo de áreas planas, de la siguiente forma.

Teorema. Sea D una región del plano, de tipo 3, y sea su frontera una curva cerrada simple, C, orientada positivamente. Entonces

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx\,.$$

Demostración

Apliquemos el teorema de Green al campo vectorial $F(x, y) = (-y, x)$; de $P = -y$, $Q = x$ resulta

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_D (1+1)\, dx\, dy = 2A(D),$$

$$\int_\partial Pdx + Qdy = \int_C -y\, dx + x\, dy\,,$$

es decir,

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx\,. \blacksquare$$

Ejemplo

Sea la curva (hipocicloide) parametrizada en sentido positivo por

$$\sigma(t) = (2\cos t + \cos 2t,\, 2\,sen\, t - sen\, 2t), \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

El área encerrada será

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big((2\cos t + \cos 2t) \cdot (2\cos t - 2\cos 2t) -$$

$$- (2\,sen\, t - sen\, 2t) \cdot (-2\,sen\, t - 2\,sen\, 2t) \big)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2 - 2\cos 3t)\, dt = 2\pi\,.$$

II - Integrales de superficie

Parametrización de una superficie

Definición. Dada una función (normalmente de clase al menos C^1) $\Phi: D \to \boldsymbol{R}^3$, donde D es un dominio elemental de $\boldsymbol{R}^2$, a la imagen de Φ, $S=\Phi(D)$, la llamamos *superficie* (de clase C^1 si lo es la función), y a la función Φ, *parametrización* de S. Llamando u y v a los *parámetros* (variables en D), podemos escribir

$$\Phi(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),$$

o también

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v), \end{cases}$$

ecuaciones paramétricas de la superficie.

Cambio de parámetros

Sean D y D^* dos dominios elementales del plano, h un *homeomorfismo* de D^* sobre D, de clase C^1 y tal que h^{-1} sea también C^1, y $\Phi: D \to \boldsymbol{R}^3$ una parametrización de una superficie S. Queda entonces definida una aplicación $\Psi=\Phi\circ h$ de D^* en $\boldsymbol{R}^3$, según el esquema

$$\begin{array}{ccc} D^* \xrightarrow{h} D \xrightarrow{\Phi} \boldsymbol{R}^3 & \qquad & D^* \xrightarrow{\Psi=\Phi\circ h} \boldsymbol{R}^3 \\ (\xi,\eta)\mapsto(u,v)\mapsto(x,y,z) & \qquad & (\xi,\eta) \;\mapsto\; (x,y,z) \end{array}$$

siendo iguales las imágenes: $S=\Phi(D)=\Psi(D^*)$.

Definición. Con las hipótesis y notaciones que acabamos de ver, se dice que la aplicación

$$\Psi=\Phi\circ h : D^* \to \boldsymbol{R}^3$$

es **otra parametrización** de la misma superficie S.

Ejemplo

$$\Phi(u,v)=(\cos u\,\mathrm{sen}\,v,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v,\cos v),\quad (u,v)\in D=[0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

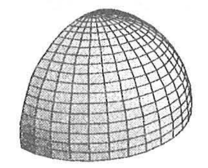
$$\Psi(\xi,\eta)=\left(\xi\,\mathrm{sen}\,\eta,\sqrt{1-\xi^2},\xi\cos\eta\right),\quad (\xi,\eta)\in D^*=[0,1]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$$

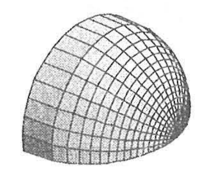
son dos parametrizaciones del cuarto de esfera

$$x^2+y^2+z^2=1,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0;$$

el homeomorfismo h tal que $\Psi=\Phi\circ h$ es

$$h:D^*\to D,\quad h(\xi,\eta)=\left(\arccos\frac{\xi\,\mathrm{sen}\,\eta}{\sqrt{1-\xi^2\cos^2\eta}},\arccos(\xi\cos\eta)\right)=(u,v).$$





En la figura pueden verse dos imágenes del cuarto de esfera, e indicadas sobre cada una las *curvas coordenadas*, es decir, las curvas $u=cte$, $v=cte$, o bien $\xi=cte$, $\eta=cte$, para las dos parametrizaciones dadas.

Orientación de una superficie

Definición. Se dice que dos parametrizaciones de una misma superficie son *del mismo sentido*, si el jacobiano del homeomorfismo h que las relaciona (que por las hipótesis es distinto de 0) es *positivo*, y que son *de sentido opuesto* si es *negativo*.

Esto divide el conjunto de las parametrizaciones de una superficie en dos clases de equivalencia. Se dice que una superficie está *orientada* cuando se ha atribuído un *signo* a cada una de estas clases. Es decir, una vez elegida una parametrización como positiva, un cambio de parámetros conservará la orientación si su jacobiano es positivo, y la cambiará si es negativo.

En el ejemplo del apartado anterior puede comprobarse que el jacobiano de h,

$$J_h=\frac{\sqrt{2}\,\xi}{\left(1-\xi^2\right)\sqrt{2-\xi^2-\xi^2\cos 2\eta}},$$

se mantiene positivo para todos los valores de los parámetros: las dos parametrizaciones son del mismo sentido.

Plano tangente. Vector normal

Tomemos un punto de una superficie, $\Phi(u_0,v_0)$ con $(u_0,v_0)\in D$; si fijando el valor de uno de los parámetros dejamos variar el otro obtendremos dos funciones, $\rho(u)=\Phi(u,v_0)$ y $\sigma(v)=\Phi(u_0,v)$, definidas respectivamente en dos entornos de u_0 y v_0, que no son otra cosa que parametrizaciones (desde luego de clase C^1, como lo es Φ) de dos curvas coordenadas que pasan por dicho punto. Sean sus vectores tangentes respectivos $\boldsymbol{T}_u=\rho'(u_0)=\Phi'_u(u_0,v_0)$ y $\boldsymbol{T}_v=\sigma'(v_0)=\Phi'_v(u_0,v_0)$.

Definición. Se dice que un punto de una superficie es **regular** si en él se verifica que

$$\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v\neq\boldsymbol{0},$$

y que es **singular** en caso contrario.

En lo que sigue consideraremos superficies S que sean imágenes de parametrizaciones en las que D sea un dominio elemental y, excepto quizá en la frontera de D, Φ sea de clase C^1 y *biyectiva* y los puntos de S sean todos regulares.

Teorema. El plano engendrado por los vectores $\boldsymbol{T}_u$ y $\boldsymbol{T}_v$ es independiente de la parametrización elegida.

Demostración. Si es $\Psi=\Phi\circ h$ y $h(\xi,\eta)=(u,v)$, será

$$\begin{pmatrix}\Psi'_\xi & \Psi'_\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Phi'_u & \Phi'_v\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u'_\xi & u'_\eta\\ v'_\xi & v'_\eta\end{pmatrix},$$

y como la matriz de derivadas de h es regular, los dos pares de vectores de las matrices fila, $\{\boldsymbol{T}_\xi,\boldsymbol{T}_\eta\}$ y $\{\boldsymbol{T}_u,\boldsymbol{T}_v\}$, engendran el mismo plano. ■

Definición. Se llama **plano tangente** a una superficie en un punto regular al plano engendrado por los vectores $\boldsymbol{T}_u$ y $\boldsymbol{T}_v$; y **normal** a la superficie en ese mismo punto a la recta que pasa por él y es ortogonal al plano tangente (es decir, a la engendrada por el vector $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v$).

Se comprueba inmediatamente que el vector $\boldsymbol{N}$ que engendra la normal a la superficie no es invariante en un cambio de parámetros, sino que, si es $\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{T}_\alpha\times\boldsymbol{T}_\beta$ el correspondiente a la nueva parametrización $\Psi=\Phi\circ h$, se verifica

$$\boldsymbol{N}_1=J_h\boldsymbol{N}$$

donde J_h es el jacobiano de h. De lo que se deduce, por otra parte, que el *sentido* de dicho vector sí caracteriza la orientación de la superficie.

Ejemplo

La esfera de radio r y centro $(0,0,0)$ admite la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x = r\,sen\,u\,cos\,v \\ y = r\,sen\,u\,sen\,v \qquad (u,v) \in D = [0,\ \pi] \times [0,\ 2\pi]; \\ z = r\,cos\,u\,, \end{cases}$$

para ella resulta

$$\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v = r^2 \left(sen^2\,u\,cos\,v, sen^2\,u\,sen\,v, sen\,u\,cos\,u\right) = r\,sen\,u\,(x, y, z),$$

y como $sen\,u \geq 0$, el sentido del vector N es el mismo que el del vector (x, y, z), es decir, intuitivamente, *hacia el exterior* de la esfera (es el que suele tomarse como positivo).

Observación. Para $u = 0$ ó $u = \pi$ tenemos dos puntos *singulares*, $(0, 0, r)$ y $(0, 0, -r)$, que corresponden a los puntos de D en los que la parametrización no es biyectiva, los puntos $(0, v)$ y (π, v); como éstos son puntos de la frontera de D y aquéllos son en número finito (2), no se plantean verdaderos problemas.

Si es $N = (N_1, N_2, N_3)$ en el punto $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$, la ecuación del plano tangente será

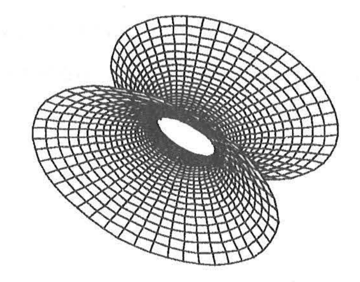
$$N_1(x - x_0) + N_2(y - y_0) + N_3(z - z_0) = 0.$$

Ejemplo 1

Hallar una parametrización para el hiperboloide

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 25 = 0.$$

Los términos positivos sugieren hacer $x = r\,cos\,u, z = \frac{1}{\sqrt{2}} r\,sen\,u$, con lo que tenemos $r^2 - 3y^2 - 25 = 0$, o bien $\left(\frac{r}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{5/\sqrt{3}}\right)^2 = 1$, y esto, haciendo $\frac{r}{5} = ch\,v$, $\frac{y}{5/\sqrt{3}} = sh\,v$ nos lleva finalmente a



$$\begin{cases} x = 5\,cos\,u\,ch\,v \\ y = \dfrac{5}{\sqrt{3}} sh\,v \qquad (u,v) \in [0, 2\pi] \times \boldsymbol{R}. \\ z = \dfrac{5}{\sqrt{2}} sen\,u\,ch\,v \end{cases}$$

En la figura se indican las curvas coordenadas para esta parametrización: $u = cte$ (hipérbolas) y $v = cte$ (elipses).

Ejemplo 2

Determinar si es regular el punto definido por $(u,v)=(2,0)$ en la superficie parametrizada, en un entorno de dicho punto, por

$$\Phi\colon \boldsymbol{R}\times[0,2\pi]\to \boldsymbol{R}^3,\quad \Phi(u,v)=\left((1+u)\cos v,\,(1-u)\operatorname{sen} v,\,u^2\right),$$

y hallar, en caso afirmativo, el plano tangente y la normal en él.

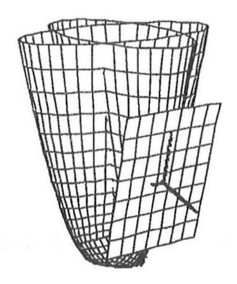
Tenemos:

$$\Phi(2,0)=(3,0,4),$$
$$\Phi'_u(u,v)=(\cos v,\,-\operatorname{sen} v,\,2u),\quad \Phi'_u(2,0)=(1,0,4),$$
$$\Phi'_v(u,v)=(-(1+u)\operatorname{sen} v,\,(1-u)\cos v,\,0),\quad \Phi'_v(2,0)=(0,-1,0),$$

$$\boldsymbol{N}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}=(4,0,-1);$$

luego el punto es regular, el plano tangente en él es

$$4(x-3)-(z-4)=0 \quad \text{o bien} \quad 4x-z-8=0,$$



y la normal

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{4}=\dfrac{z-4}{-1} \\ y=0 \end{cases}$$

o bien, paramétricamente

$$(3+4\lambda,\,0,\,4-\lambda),\quad \lambda\in\boldsymbol{R}.$$

En la figura se representa la superficie, indicando sobre ella las curvas coordenadas y, en el punto $(3,0,4)$, los vectores $\boldsymbol{T}_u$ y $\boldsymbol{T}_v$ (tangentes a $u=2$, $v=0$), el plano tangente y el vector normal.

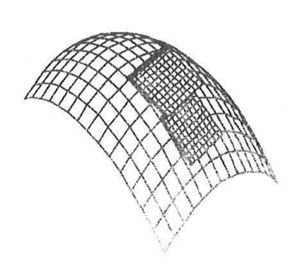
Área de una superficie

Teorema. Sean Φ y Ψ, con dominios D y D^* respectivamente, dos parametrizaciones cualesquiera de una superficie S, y $\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v$, $\boldsymbol{Q}_u\times\boldsymbol{Q}_v$ los vectores normales respectivos. Entonces se verifica que

$$\int_D \|T_u \times T_v\|\, dudv = \int_{D^*} \|Q_u \times Q_v\|\, dudv.$$

Admitiremos este teorema sin demostración.

Teniendo en cuenta el significado geométrico de los vectores $T_u du = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) du$ y su análogo $T_v\, dv$, y el de la norma de un producto vectorial (la norma del producto vectorial es el área del paralelogramo formado por los vectores factores), y basándonos en la no dependencia de la parametrización elegida establecida en el teorema anterior, resulta coherente la siguiente



Definición. Dada una superficie S, parametrizada por

$$\Phi: D \to \mathbf{R}^3,$$

definimos su *área* como

$$A(S) = \int_D \|T_u \times T_v\|\, dudv.$$

Teniendo en cuenta que

$$T_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ y } T_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

es

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = J\frac{(y,z)}{(u,v)}\mathbf{i} + J\frac{(z,x)}{(u,v)}\mathbf{j} + J\frac{(x,y)}{(u,v)}\mathbf{k},$$

y por lo tanto

$$A(S) = \int_D \sqrt{J\frac{(x,y)}{(u,v)}^2 + J\frac{(y,z)}{(u,v)}^2 + J\frac{(z,x)}{(u,v)}^2}\, dudv.$$

Ejemplo 1

Calculemos el área de una esfera S de radio R. Tomando su centro como origen de coordenadas y con la parametrización ya vista,

$$\begin{cases} x = R\,sen\,u\,cos\,v \\ y = R\,sen\,u\,sen\,v \\ z = R\,cos\,u\,, \end{cases} \qquad (u,v) \in [0,\pi]\times[0,2\pi]\,,$$

resulta

$$\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\| = R^2|sen\,u| = R^2\,sen\,u\,,$$

$$A(S) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} R^2\,sen\,u\,dv\,du = 2\pi R^2[-cos\,u]_0^{\pi} = 4\pi R^2\,,$$

expresión bien conocida.

Observación. Si una superficie viene dada *en forma explícita*, como la gráfica de una función C^1 de dos variables, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, existe la parametrización obvia

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v)\,, \end{cases}$$

resultando

$$J\frac{(x,y)}{(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,, \quad J\frac{(y,z)}{(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial x}\,, \quad J\frac{(z,x)}{(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial y}\,,$$

$$\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\| = \|\boldsymbol{T}_x \times \boldsymbol{T}_y\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Ejemplo 1 bis

Volvamos a calcular el área de una esfera, pero escribiendo su ecuación de forma explícita, considerándola como el doble de la gráfica de la función

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,;$$

el área buscada será, siendo D el círculo de radio R y centro el origen en el plano OXY,

$$A(S) = 2\int_D \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\,dx\,dy = 2\int_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy\,,$$

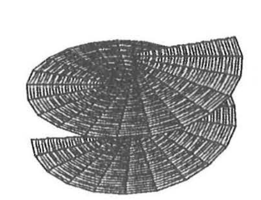
integral de cálculo inmediato cambiando a coordenadas polares:

$$A(S)=2\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}r\,d\theta\,dr=4\pi R\int_0^R\left(R^2-r^2\right)^{-\frac{1}{2}}r\,dr=4\pi R^2 .$$

Observación. En este último caso hemos calculado realmente una integral *impropia*, puesto que la función no es acotada; no es nada infrecuente, e ilustra una vez más la necesidad de esta generalización del concepto de integral, generalización hecha siempre a través del concepto de limite, de la manera obvia.

Ejemplo 2

Sea el helicoide, de paso $2\pi k$, radio R y ángulo α,



$$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\,sen\,v \\ z=k\,v \end{cases} \qquad (u,v)\in[0,R]\times[0,\alpha].$$

Tenemos:

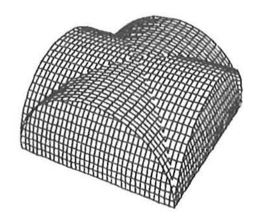
$$\left\|T_u\times T_v\right\|=\sqrt{u^2+k^2}=k\sqrt{\frac{u^2}{k^2}+1}\,,\quad A(S)=\int_0^R\int_0^\alpha k\sqrt{\frac{u^2}{k^2}+1}\,dvdu=k\alpha\int_0^R\sqrt{\frac{u^2}{k^2}+1}\,du\,,$$

y haciendo el cambio $\dfrac{u}{k}=sh\,t$, resulta finalmente

$$A(S)=\frac{k^2\alpha}{2}\left(log\frac{R+\sqrt{R^2+k^2}}{k}+\frac{R\sqrt{R^2+k^2}}{k^2}\right).$$

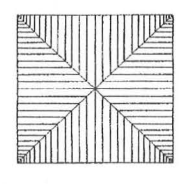
Ejemplo 3

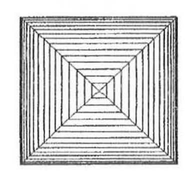
Calculemos el área de las bóvedas de arista y de rincón de claustro, engendradas por dos bóvedas de medio cañón (semicilindros de revolución) de l metros de luz. Tomando ejes de coordenadas de la manera obvia, la ecuación de uno de los dos cilindros será



$$x^2+z^2=\frac{l^2}{4},$$

y la parte del mismo situada, por ejemplo, sobre los triángulos D_A o D_R, encerrados en el plano OXY por las rectas





$$y=x\,,\ y=0\,,\ x=\frac{l}{2}, \text{ o bien } y=x\,,\ y=\frac{l}{2},\ x=0,$$

definirá respectivamente un octavo de cada bóveda.

Una parametrización del cilindro es

$$\begin{cases} x = \dfrac{l}{2} \cos u \\ y = v \\ z = \dfrac{l}{2} sen\, u\,, \end{cases}$$

de la que resulta

$$J\frac{(x,y)}{(u,v)} = -\frac{l}{2} sen\, u\,, \quad J\frac{(y,z)}{(u,v)} = -\frac{l}{2} cos\, u\,, \quad J\frac{(x,z)}{(u,v)} = 0\,,$$

$$\sqrt{J\frac{(x,y)}{(u,v)}^2 + J\frac{(y,z)}{(u,v)}^2 + J\frac{(z,x)}{(u,v)}^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4}\left(sen^2 u + cos^2 u\right)} = \frac{l}{2}\,.$$

Bóveda de arista: el dominio es, en función de los parámetros,

$$D_A = \left\{(u,v) \middle| 0 \le u \le \frac{\pi}{2}, 0 \le v \le \frac{l}{2} cos\, u\right\},$$

y el área,

$$A_A = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{l}{2} cos\, u} \frac{l}{2} dv du = 4l \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} cos\, u du = 2l^2 \text{ m}^2\,,$$

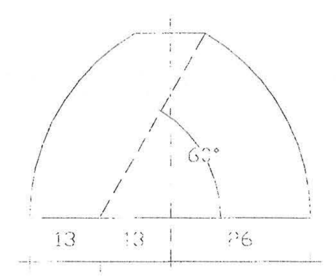
el doble del área de la planta.

Bóveda de rincón de claustro: el dominio es ahora

$$D_R = \left\{(u,v) \,|\, 0 \le u \le \frac{\pi}{2}, \frac{l}{2} cos\, u \le v \le \frac{l}{2}\right\},$$

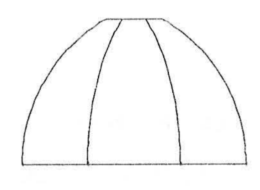
y el área,

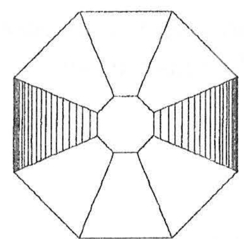
$$A_R = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{l}{2}cos\, u}^{\frac{l}{2}} \frac{l}{2} dv\, du = 4l \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}(1 - cos\, u)\, du = 2l^2 [u\text{-} sen\, u]_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi - 2) l^2 \text{ m}^2\,.$$



Ejemplo 4

El extradós de una cierta bóveda es como indican las figuras: planta octagonal regular de 26 metros de apotema y, sobre cada dos triángulos diametralmente opuestos de la base, un cilindro cuya directriz es una ojiva formada





por un par de arcos de circunferencia de 60° ($\frac{\pi}{3}$), cada uno con centro en la base a una distancia de 13 m. del arranque del otro, y todo ello rematado en la parte superior por un plano (sobre el que está situada la linterna). Calculemos el área total de dicho paramento exterior.

La ecuación del correspondiente elemento de bóveda es

$$(x+13)^2 + z^2 = 39^2,$$

con lo que la apotema del octágono superior será

$$-13 + 39\,cos\frac{\pi}{3} = \frac{13}{2} = 6{,}5 \text{ m.};$$

teniendo en cuenta que

$$tg\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-cos\frac{\pi}{4}}{1+cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2}-1,$$

haciendo uso de la simetría existente y tomando ejes de la manera obvia, el dominio de integración, considerando sólo un dieciseisavo de la base, será:

$$D = \{(x,y) | 6{,}5 \le x \le 26,\ 0 \le y \le (\sqrt{2}-1)x\};$$

la ecuación de la bóveda y el dominio sugieren la parametrización

$$\begin{cases} x = -13 + 39\,cos\,t \\ y = ux = u(-13+39\,cos\,t), \quad (t,u) \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times [0, \sqrt{2}-1]; \\ z = 39\,sen\,t \end{cases}$$

con todo lo cual el cálculo continúa así:

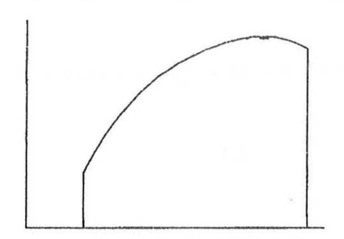
$$dS = \sqrt{J\frac{(x,y)}{(t,u)}^2 + J\frac{(y,z)}{(t,u)}^2 + J\frac{(z,x)}{(t,u)}^2}\,dt\,du = 39(39\,cos\,t - 13)dt\,du,$$

$$A = 16 \cdot 39 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\sqrt{2}-1} (39\,cos\,t - 13)du\,dt = 624(\sqrt{2}-1)\int_0^{\frac{\pi}{3}} (39\,cos\,t - 13)dt =$$

$$= 624(\sqrt{2}-1)[39\,sen\,t - 13t]_0^{\frac{\pi}{3}} = 624(\sqrt{2}-1)\left(\frac{39\sqrt{3}}{2} - \frac{13\pi}{3}\right) \cong 5211{,}11 \text{ m}^2.$$

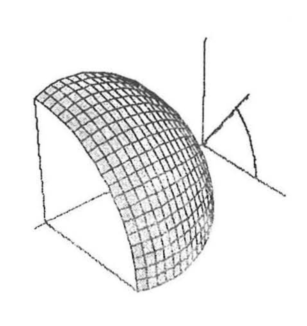
Área de una superficie de revolución

Sea f una función de una variable, definida y de clase C^1 en un intervalo $[a,b]$. Supongamos que, en el espacio $\boldsymbol{R}^3$, hacemos *girar* la curva $y=f(x)$ alrededor del eje OX: se engendrará una cierta superficie de revolución, S. Vamos a calcular su área pasando a las variables



$$\begin{cases} x = x \\ y = r\cos\theta \\ z = r\,sen\,\theta \end{cases}$$

es decir, a unas coordenadas cilíndricas cuyo eje $r=0$ es el OX. La curva generatriz de S es ahora $r=f(x)$ en el plano $\theta=0$ (en la figura, para mayor claridad, θ varía sólo de 0 a $\frac{\pi}{2}$), y las ecuaciones paramétricas de S con x y θ como parámetros serán



$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x)\cos\theta \qquad x\in[a,b],\ \theta\in[0,2\pi]. \\ z = f(x)\,sen\,\theta \end{cases}$$

Calculemos los jacobianos y continuemos el cálculo:

$$J\frac{(x,y)}{(x,\theta)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f'(x)\cos\theta & -f(x)\,sen\,\theta \end{vmatrix} = -f(x)\,sen\,\theta,$$

$$J\frac{(y,z)}{(x,\theta)} = \begin{vmatrix} f'(x)\cos\theta & -f(x)\,sen\,\theta \\ f'(x)\,sen\,\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix} = f(x)f'(x),$$

$$J\frac{(z,x)}{(x,\theta)} = \begin{vmatrix} f'(x)\,sen\,\theta & f(x)\cos\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f(x)\cos\theta;$$

$$\sqrt{f(x)^2\,sen^2\,\theta + f(x)^2 f'(x)^2 + f(x)^2\cos^2\theta} = f(x)\sqrt{1+f'(x)^2},$$

$$A(S) = \int_a^b\int_0^{2\pi} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,d\theta\,dx = 2\pi\int_a^b f(x)\,ds,$$

expresión bien conocida que reduce el cálculo a una integral simple.

Área de una superficie cilíndrica

Como sabemos, un cilindro queda determinado vectorialmente por la parametrización

$$\Phi(t,\lambda)=\sigma(t)+\lambda\,\omega(t),\quad (t,\lambda)\in[t_0,t_1]\times[\lambda_0,\lambda_1],$$

donde $\sigma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ es una *curva directriz* y $\omega(t)$ es un *vector* que varía con t pero *conservando su dirección*. Podemos entonces tomar ésta como la dirección de uno de los ejes, por ejemplo el OZ, con lo que

$$\omega(t)=(0,0,f(t)),$$

y la directriz, que es cualquier curva simple que corte a todas las generatrices (rectas engendradas por el vector $\omega(t)$ para $t\in[t_0,t_1]$), puede tomarse como la intersección de las generatrices por un plano ortogonal a ellas, con lo cual será una curva plana, que podemos situar en el plano OX:

$$\sigma(t)=(x(t),y(t),0).$$

El cilindro será entonces

$$\Phi(t,\lambda)=(x(t),y(t),\lambda f(t)),\quad (t,\lambda)\in[t_0,t_1]\times[\lambda_0,\lambda_1].$$

Calculemos su área;

$$J\frac{(x,y)}{(t,\lambda)}=\begin{vmatrix} x'(t) & 0 \\ y'(t) & 0 \end{vmatrix}=0,\quad J\frac{(y,z)}{(t,\lambda)}=\begin{vmatrix} y'(t) & 0 \\ \lambda f'(t) & f(t) \end{vmatrix}=-f(t)y'(t),$$

$$J\frac{(z,x)}{(t,\lambda)}=\begin{vmatrix} \lambda f'(t) & f(t) \\ x'(t) & 0 \end{vmatrix}=-f(t)x'(t),\quad A=\int_{t_0}^{t_1}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} f(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,d\lambda\,dt=$$

$$=(\lambda_1-\lambda_0)\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,ds,$$

que es una integral de línea.

Volvamos al *Ejemplo 3* de la página 18; la directriz es la curva plana $\sigma(t)=(5cht,5sht)$ (planta del muro), el vector es $\omega(t)=\left(0,0,\dfrac{14\sqrt{ch^2t+sh^2t}}{ch^2t}\right)$ y el cilindro

$$\Phi(t,\lambda)=\sigma(t)+\lambda\omega(t),\quad (t,\lambda)\in[a,b]\times[0,1],$$

siendo $a=-2log(\sqrt{2}+1)$, $b=-a$, $\lambda=0$ en la base del muro y $\lambda=1$ en la cubierta, con lo que el área resulta

$$A=\int_a^b\int_0^1 h(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,d\lambda\,dt=\int_a^b h(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt\,,$$

que es la integral que allí calculamos.

Teorema de Guldin

Sabemos que, si es $G=(\bar{x},\bar{y})$ el centro de masas del arco $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, se verifica que

$$\bar{y}=\frac{\int_a^b y\,ds}{l}\,,$$

o bien

$$l\cdot\bar{y}=\int_a^b f(x)\,ds\,,$$

siendo l la longitud del arco. Luego el área de la superficie de revolución que acabamos de ver más arriba puede escribirse así:

$$A(S)=2\pi\,\bar{y}\cdot l\,;$$

es el teorema de Guldin para áreas, análogo al correspondiente a volúmenes.

Teorema (Guldin). El área de la superficie engendrada por el giro de una curva plana alrededor de un eje situado en su plano, es igual al producto de la longitud del arco por la de la circunferencia descrita por su centro de masa.

Por ejemplo, el área de un toro, T, engendrado por el giro de un círculo de radio r alrededor de un eje a distancia R ($>r$) de su centro, será

$$A(T)=4\pi^2Rr\,.$$

Integral de un campo escalar sobre una superficie

Supongamos que tenemos una superficie S, parametrizada por

$$\Phi\colon D\to \boldsymbol{R}^3,\quad \Phi(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

con Φ de clase al menos C^1, y un campo escalar f definido en un dominio de $\boldsymbol{R}^3$ que contiene S; está definida entonces la integral doble

$$\int_D f(\Phi(u,v))\|\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v\|\,du\,dv\,,$$

y, lo mismo que en el caso del área que acabamos de ver, se demuestra que el valor de esta integral no depende de la parametrización elegida, es decir que, si es Ψ otra parametrización de S, de dominio D^*, y $\boldsymbol{Q}_u \times \boldsymbol{Q}_v$ el vector normal correspondiente, se verifica que

$$\int_D f(\Phi(u,v))\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|\,dudv = \int_{D^*} f(\Psi(u,v))\|\boldsymbol{Q}_u \times \boldsymbol{Q}_v\|\,dudv.$$

Con todo esto podemos dar la siguiente

Definición. Sea S una superficie,

$$\Phi : D \to \boldsymbol{R}^3,\quad \Phi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

una parametrización cualquiera de la misma y f una función real continua en S. Llamamos *integral de f sobre S* a

$$\int_D f\big(\Phi(u,v)\big)\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|\,du\,dv,$$

con las notaciones

$$\int_S f\,dS \quad \text{ó} \quad \int_S f(x,y,z)\,dS.$$

(Obsérvese que con esta definición, y de forma análoga a lo que ocurría con la longitud de una curva, calcular el área de una superficie equivale a integrar sobre ella la función constante $f(x,y,z)=1$.)

Ejemplo

Calculemos

$$\int_S f\,dS,$$

siendo $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $f(x,y,z) = |x\,y\,z|$, y S la esfera de radio R y centro el origen.

Con la parametrización habitual para la esfera es

$$f(x,y,z) = \left|R^3\, sen^2 u \cos u\, sen\, v \cos v\right|,$$

y si, para obviar los valores absolutos, hacemos uso de la simetría e integramos en el primer octante, tenemos:

$$\int_S f\,dS = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^5\, sen^3 u \cos u\, sen\, v \cos v\,dvdu =$$

$$= 8R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^3 u \cos u \left[\frac{sen^2 v}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} du = 4Rr^5 \left[\frac{sen^4 u}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = R^5 .$$

Aplicaciones: masas, momentos, centros de masas

Lo mismo que en el caso de las curvas, si el campo escalar designa una densidad por unidad de superficie, $m(x, y, z)$, la masa será la integral de ésta sobre S,

$$M = \int_S m(x, y, z) dS ,$$

y los momentos de inercia y centros de masas se definirán de la forma acostumbrada.

Ejemplo

Calculemos la masa M, y el momento de inercia respecto del eje OZ I_z, de la superficie esférica

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z \geq \dfrac{R}{2} \end{cases}$$

con densidad $m(x, y, z) = 2R - z$.

Una parametrización de la superficie es

$$\begin{cases} x = R \cos u \, sen v \\ y = R \, sen u \, sen v \\ z = R \cos v \end{cases} \qquad (u, v) \in [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{3} \right],$$

con la que resulta

$$\sqrt{J \frac{(x, y)}{(u, v)}^2 + J \frac{(y, z)}{(u, v)}^2 + J \frac{(z, x)}{(u, v)}^2} = R^2 \, sen v \quad \text{y} \quad m^*(u, v) = R(2 - \cos v).$$

La masa será:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} R^3 (2 - \cos v) sen v \, dv \, du = R^3 \int_0^{2\pi} \left[-2 \cos v - \frac{sen^2 v}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} du =$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} \left(-1 - \frac{3}{8} + 2 \right) du = \frac{5}{4} \pi R^3 .$$

Y el momento de inercia pedido:

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} R^5(2-cos\,v)sen^3\,v\,dv\,du = R^5\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi}(2-cos\,v)(1-cos^2\,v)sen\,v\,du\,dv =$$

$$= 2\pi R^5\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-cos\,v-2cos^2\,v+cos^3\,v)sen\,v\,dv = 2\pi R^5\left[-2cos\,v+\frac{cos^2\,v}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2cos^3\,v}{3}-\frac{cos^4\,v}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\pi R^5\left(-1+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{64}+2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{53}{96}\pi R^5.$$

Integral de un campo vectorial sobre una superficie

Antes de dar la definición deberemos, como en casos anteriores, establecer primero un resultado que garantiza que el concepto que vamos a definir no depende de la parametrización elegida para la superficie, sino sólo de ésta misma.

Teorema. Sean Φ y Ψ, con dominios D y D^* respectivamente, dos parametrizaciones cualesquiera de una superficie S, $\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v$, $\boldsymbol{Q}_u\times\boldsymbol{Q}_v$ los vectores normales respectivos, y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial definido en S. Entonces, si Φ y Ψ son del mismo sentido,

$$\int_D \boldsymbol{F}(\Phi(u,v))\cdot(\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v)\,du\,dv = \int_{D^*}\boldsymbol{F}(\Psi(u,v))\cdot(\boldsymbol{Q}_u\times\boldsymbol{Q}_v)\,dudv,$$

y si de sentidos opuestos,

$$\int_D \boldsymbol{F}(\Phi(u,v))\cdot(\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v)\,du\,dv = -\int_{D^*}\boldsymbol{F}(\Psi(u,v))\cdot(\boldsymbol{Q}_u\times\boldsymbol{Q}_v)\,dudv.$$

Lo admitiremos sin demostración.

Definición. Sea S una superficie *orientada*, parametrizada positivamente por

$$\Phi: D\to S\subset \boldsymbol{R}^3,\quad \Phi(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),$$

y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial definido en S. Se llama *integral de superficie de* $\boldsymbol{F}$ *sobre* S, o bien *flujo del campo* $\boldsymbol{F}$ *a través de* S, a

$$\int_D \boldsymbol{F}(\Phi(u,v))\cdot(\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v)\,du\,dv,$$

con las notaciones

$$\int_{S^+}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S},\quad \text{o también}\quad \iint_{S^+}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

Como imagen física podemos decir por ejemplo que, si $\boldsymbol{F}$ es la velocidad de un fluido, el *flujo* es el *gasto* o volumen total de fluido que atraviesa la superficie S en la unidad de tiempo.

Ejemplo

Sea $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ la velocidad de un fluido y S la superficie (*toro*) parametrizada positivamente por

$$\begin{cases} x=(a+b\cos v)\cos u \\ y=(a+b\cos v)\operatorname{sen} u \\ z=b\operatorname{sen} v, \end{cases} \qquad (0<b<a), \quad (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi].$$

Calculemos el flujo a través de S:

$$\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -(a+b\cos v)\operatorname{sen} u & (a+b\cos v)\cos u & 0 \\ -b\operatorname{sen} v\cos u & -b\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u & b\cos v \end{vmatrix}=$$

$$=b\big((a+b\cos v)\cos u\cos v,\ (a+b\cos v)\operatorname{sen} u\cos v,\ (a+b\cos v)\operatorname{sen} v\big),$$

vector dirigido *hacia afuera* del toro;

$$\int_{S^+}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b\big((a+b\cos v)^2\cos^2 u\cos v+(a+b\cos v)^2\operatorname{sen}^2 u\cos v+$$

$$+b(a+b\cos v)\operatorname{sen}^2 v\big)\,du\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b\Big((a^2+b^2)\cos v+\frac{ab}{2}(3+\cos 2v)\Big)\,du\,dv=$$

$$=2\pi b\left[(a^2+b^2)\operatorname{sen} v+\frac{3ab}{2}v+ab\frac{\operatorname{sen} 2v}{4}\right]_0^{2\pi}=6ab^2\pi^2,$$

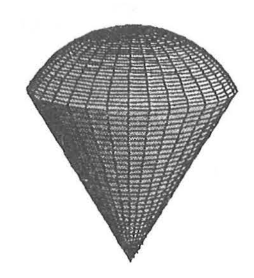
es decir, el triple del volumen del toro.

Otro ejemplo es el flujo de calor en un medio. Si $T(x,y,z)$ es la temperatura en cada punto de un recinto, el campo de calor es $\boldsymbol{F}=-k\nabla T$, y el flujo de calor a través de una superficie S es la integral de $\boldsymbol{F}$ sobre S.

Ejemplo

Sea Ω el sólido limitado superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ e inferiormente por el cono $3x^2+3y^2=(z+1)^2$, y $T(x,y,z)=x^2+z^2$ la temperatura de un recinto en el que está contenido Ω. Calculemos el flujo de calor a través de la frontera de Ω (supongamos $k=1$).

La esfera y el cono se cortan en la circunferencia



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4} \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

luego el flujo será

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_E -\nabla T \cdot d\boldsymbol{S} + \int_C -\nabla T \cdot d\boldsymbol{S},$$

siendo

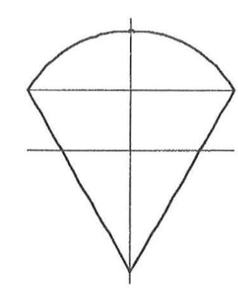
$$E = \left\{ (x,y,z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, 0 \le x^2 + y^2 \le \frac{3}{4} \right\},$$

$$C = \left\{ (x,y,z) \middle| 3x^2 + 3y^2 = (z+1)^2,\, 0 \le x^2 + y^2 \le \frac{3}{4} \right\},$$

orientadas de la misma manera.

i) Esfera; parametrización

$$\begin{cases} x = \cos\theta \, sen\,\varphi \\ y = sen\,\theta \, sen\,\varphi \\ z = \cos\varphi \end{cases} \quad (\theta,\varphi) \in [0,2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right],$$



$$\boldsymbol{T}_\theta \times \boldsymbol{T}_\varphi = -(x,y,z)\, sen\,\varphi,$$

dirigido hacia abajo, es decir, *hacia adentro* del sólido,

$$-\nabla T = (-2x, 0, -2z) = (-2\cos\theta \, sen\,\varphi, 0, -2\cos\varphi), \quad \int_E -\nabla T \cdot d\boldsymbol{S} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos\theta \, sen\,\varphi, 0, 2\cos\varphi) \cdot (\cos\theta \, sen\,\varphi, sen\,\theta \, sen\,\varphi, \cos\varphi) sen\,\varphi \; d\varphi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2\cos^2\theta \, sen\,\varphi (1 - \cos^2\varphi) + 2\cos^2\varphi \, sen\,\varphi\right) d\varphi \, d\theta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left[\cos^2\theta \left(-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right) - \frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{3}} d\theta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}+1-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{24}+\frac{1}{3}\right)d\theta =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{24}\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\frac{7}{24}\right)d\theta = 2\left[\frac{5}{96}(2\theta+\operatorname{sen} 2\theta)+\frac{7}{24}\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{19\pi}{12}.$$

ii) Cono; parametrización

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = \sqrt{3}\,r - 1 \end{cases} \quad (r,\theta)\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\times[0,2\pi],$$

$$\boldsymbol{T}_r \times \boldsymbol{T}_\theta = \left(-\sqrt{3}\,r\cos\theta, -\sqrt{3}\,r\operatorname{sen}\theta, r\right),$$

dirigido hacia arriba, es decir, *hacia adentro*, como antes,

$$-\nabla T = (-2x, 0, -2z) = \left(-2r\cos\theta, 0, -2\sqrt{3}\,r+2\right),$$

$$\int_C -\nabla T\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{3}\,r\cos\theta, \sqrt{3}\,r\cos\theta, -r\right)\cdot\left(2r\cos\theta, 0, 2\sqrt{3}\,r+2\right)d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_0^{2\pi}\left(2\sqrt{3}\,r^2\left(\cos^2\theta+1\right)-2r\right)d\theta\, dr = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\sqrt{3}\,r^2(3+\cos 2\theta)-2r\right)d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\sqrt{3}\,r^2\left(3\theta+\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)-2r\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(6\sqrt{3}\,r^2-4r\right)dr =$$

$$= \pi\left[2\sqrt{3}\,r^3-2r^2\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\pi}{4}.$$

Con lo cual el flujo es

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \left(\frac{19}{12}+\frac{3}{4}\right)\pi = \frac{7\pi}{3},$$

calor que *gana* el sólido por unidad de tiempo.

Componente normal

La integral de $\boldsymbol{F}$ sobre S puede expresarse asimismo de la siguiente forma. Sea

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v}{\left\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\right\|}$$

el *vector normal unitario*, que según lo ya visto será común a toda la clase de parametrizaciones del mismo sentido, es decir, caracterizará la orientación de la superficie. Será, supuesto que $\boldsymbol{n}$ corresponda a orientación positiva,

$$\int_{S^+} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\Phi} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\Phi} \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{n}\|\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v\|du\,dv = \int_{S^+} (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\,dS = \int_{S^+} f\,dS,$$

donde f es el campo escalar, o función real, $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$, que no es otra cosa que *la componente de F normal a la superficie*. Es decir, que análogamente a lo que ocurría con las integrales de línea, el flujo de un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ sobre una superficie S es la integral de un campo escalar, la componente normal de $\boldsymbol{F}$, con la orientación definida por el vector $\boldsymbol{n}$.

Teorema de Stokes

Identifica dos integrales, la primera sobre una superficie S y la segunda curvilínea a lo largo de la frontera de S.

Teorema. Sea $S \subset \boldsymbol{R}^3$ una superficie orientada, $\Phi: D \to S$ una parametrización biyectiva y de clase C^2, ∂S su frontera orientada y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial C^1 en S. Se verifica entonces que

$$\int_S rot\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\partial S} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}.$$

Es decir: *el flujo del rotacional de un campo vectorial a través de una superficie orientada es igual a la circulación del campo a lo largo de la frontera de aquélla.*

Naturalmente, si la superficie S es plana, la igualdad se convierte en la del teorema de Greene. El de Stokes es, pues, una generalización de aquél.

Demostración.

Llamando I_c a la integral curvilínea del segundo miembro, y teniendo en cuenta que

$$\Phi(\partial D) = \partial S,$$

resulta:

$$I_c = \int_{\partial D} \boldsymbol{F}\circ\Phi(u,v)\cdot(\Phi'\ du + \Phi'\ dv) = \int_{\partial D} \boldsymbol{F}\circ\Phi(u,v)\cdot(\boldsymbol{T}\,du + \boldsymbol{T}\,dv).$$

Hagamos

$$P = \boldsymbol{F}\circ\Phi(u,v)\cdot\boldsymbol{T}_u, \quad Q = \boldsymbol{F}\circ\Phi(u,v)\cdot\boldsymbol{T}_v,$$

y apliquemos el teorema de Green:

$$I_c = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du\, dv .$$

Pero

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial (\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\Phi})}{\partial u} \boldsymbol{T}_v + \boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\Phi}(u,v) \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial u \partial v}$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial (\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\Phi})}{\partial v} \boldsymbol{T}_u + \boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\Phi}(u,v) \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Phi}}{\partial u \partial v},$$

de donde

$$I_c = \int_D \left(\frac{\partial (\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\Phi})}{\partial u} \boldsymbol{T}_v - \frac{\partial (\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\Phi})}{\partial v} \boldsymbol{T}_u \right) du\, dv .$$

Aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial (\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\Phi})}{\partial u} \boldsymbol{T}_v = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial (\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\Phi})}{\partial v} \boldsymbol{T}_u = \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right);$$

y restando y operando, resulta:

$$I_c = \int_D \left(J \frac{(y,z)}{(u,v)} \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}, \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z} \right) + J \frac{(z,x)}{(u,v)} \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}, \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} \right) + J \frac{(x,y)}{(u,v)} \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}, \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} \right) \right) du\, dv .$$

Y como

$$\left(J \frac{(y,z)}{(u,v)}, J \frac{(z,x)}{(u,v)}, J \frac{(x,y)}{(u,v)} \right) = \boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v ,$$

hemos llegado finalmente a

$$I_c = \int_D (rot\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\Phi}) \cdot (\boldsymbol{T}_u \times \boldsymbol{T}_v)\, du\, dv = \int_S rot\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} . \blacksquare$$

Ejemplo

Supongamos que S es la parte del paraboloide

$$z = 2xy$$

situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y $\boldsymbol{F}$ el campo vectorial definido por

$$F(x,y,z)=(z,x,y);$$

calculemos

$$\int_S rot\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} \quad \text{y} \quad \int_{\partial S}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}.$$

S puede parametrizarse así:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,sen\,t \\ z = r^2\,sen\,2t, \end{cases} \qquad (r,t)\in[0,1]\times[0,2\pi],$$

con lo que

$$\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos t & sen\,t & 2r\,sen\,2t \\ -r\,sen\,t & r\cos t & 2r^2\cos 2t \end{vmatrix}=\left(-2r^2 sen\,t,-2r^2\cos t,r\right).$$

Por otro lado,

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=(1,1,1);\ \int_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot(\boldsymbol{T}_u\times\boldsymbol{T}_v)\,dt\,dr=\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(2r^2(-sen\,t-\cos t+r)\right)dt\,dr=$$

$$=\int_0^1\left[2r^2(\cos t-sen\,t+rt)\right]_{t=0}^{t=2\pi}dr=\int_0^1 2\pi r\,dr=\left[\pi r^2\right]_0^1=\pi.$$

Calculemos ahora la integral curvilínea. Es claro que ∂S es la curva

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y = sen\,t \\ z = sen\,2t \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi];$$

$$\int_{\partial S}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_0^{2\pi}\boldsymbol{F}(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt=\int_0^{2\pi}(sen\,2t,\cos t,sen\,t)\cdot(-sen\,t,2\cos t,2\cos 2t)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-sen\,2t\,sen\,t+\cos^2 t+2sen\,t\cos 2t\right)dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\pi;$$

es decir, ambas integrales son efectivamente iguales.

Observación. Si es $\Phi\colon D\to\boldsymbol{R}^3$ una parametrización de una superficie S, biyectiva salvo quizá en algunos puntos de la frontera de D, y $\sigma\colon I\to\boldsymbol{R}^2$, $\sigma(t)=(u(t),v(t))$ una parametrización de la frontera ∂D del dominio D, entonces $t\mapsto\Phi(u(t),v(t))$ habrá de ser una parametrización de la frontera de S, ∂S. Pero, salvo que supongamos que Φ sea biyectiva en todos los puntos de D cerrado,

esto puede conducir a supuestas fronteras de S carentes de sentido geométrico auténtico. Así, en el ejemplo anterior, ∂S consistiría no sólo en la circunferencia allí considerada, sino también en el arco de parábola $t \mapsto (t,\, 0,\, 4-t^2)$, $t \in [0,\, 2]$, *recorrido dos veces*, para $v = 0$ y $v = 2\pi$. No obstante, desde el punto de vista de la integración este doble recorrido equivale a una curva *cerrada*, y la circulación de $\boldsymbol{F}$ en ella será nula, con lo que podemos ignorarla y el problema desaparece.

Teorema de Gauss (o de Ostrogradski)

Este teorema identifica también dos integrales: una triple en una región Ω del espacio y una de superficie en la frontera de aquélla, $\partial\Omega$.

Teorema. Sean Ω una región del espacio de tipo 4, $\partial\Omega$ su frontera (superficie cerrada) orientada hacia el exterior y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase C^1 en Ω. Entonces

$$\int_\Omega div\, \boldsymbol{F}\; dV = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}\,.$$

Es decir: *la integral de la divergencia de un campo vectorial en un dominio elemental del espacio es igual al flujo del campo a través de la superficie frontera del dominio.*

Demostración

Sea, definida como región de tipo 1,

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\},$$

donde D es un dominio elemental del plano y φ_1 y φ_2 son dos funciones C^1 en D, iguales en la frontera de D. La frontera de Ω, $\partial\Omega$, es entonces la unión de las dos superficies S_1 y S_2 de ecuaciones $z = \varphi_1(x,y)$ y $z = \varphi_2(x,y)$, y estará orientada hacia el exterior si S_2 lo está positivamente y S_1 negativamente.

Si $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$, es, como sabemos, $div\, \boldsymbol{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$. Entonces,

$$\int_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int_{\partial\Omega} R(x,y,\varphi_2(x,y))\,dx\,dy - \int_{\partial\Omega} R(x,y,\varphi_1(x,y))\,dx\,dy\,;$$

y como, tanto para φ_1 como para φ_2, y suprimiendo los subíndices para simplificar,

$$\boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\,,$$

lo que tenemos en el segundo miembro es

$$\int_{S_2^+} (R\,\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS + \int_{S_1^-} (R\,\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS,$$

es decir, finalmente,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int_{\partial\Omega} (R\,\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$

De forma análoga pero permutando las coordenadas, obtendríamos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dV = \int_{\partial\Omega} (P\,\boldsymbol{i}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS, \qquad \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \int_{\partial\Omega} (Q\,\boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$

Y sumando las tres igualdades,

$$\int_{\Omega} div\,\boldsymbol{F}\, dV = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}. \blacksquare$$

Ejemplo 1

Sea $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ y S la superficie (*toro*) parametrizada por

$$\begin{cases} x = (a + b\cos v)\cos u \\ y = (a + b\cos v)\,sen\,u \\ z = b\,sen\,v, \end{cases} \qquad (0 < b < a), \quad (u,v) \in [0,2\pi]\times[0,2\pi].$$

En la página 38 calculamos el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de S, que resultó ser $6ab^2\pi^2$. Apliquemos ahora el teorema de Gauss, calculando la integral de la divergencia de $\boldsymbol{F}$ en Ω, el dominio del espacio encerrado por S. Haciendo

$$\begin{cases} x = (a + r\cos v)\cos u \\ y = (a + r\cos v)\,sen\,u \\ z = r\,sen\,v \end{cases}$$

es

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \le r \le b,\ 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi\},$$

y se comprueba, con un poco de cálculo, que

$$J\frac{(x,y,z)}{(r,u,v)} = r(a + r\cos v),$$

con lo cual

$$\int_{\Omega} div\, \boldsymbol{F}\, dV = \int_{\Omega} 3\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^b 3r\,(a + r\cos v)\, dr\, dv\, du = 6\pi\int_0^{2\pi}\left[\frac{a\,r^2}{2} + \frac{r^3\cos v}{3}\right]_{r=0}^{r=b} dv =$$

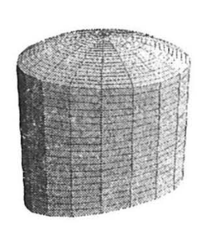
$$= 6\pi\int_0^{2\pi}\left(\frac{a\,b^2}{2} + \frac{b^3\cos v}{3}\right) dv = 6\pi\left[\frac{a\,b^2 v}{2} + \frac{b^3\, sen\, v}{3}\right]_0^{2\pi} = 6\,a\,b^2\pi^2,$$

que es, efectivamente, lo mismo que habíamos obtenido calculando directamente la integral de superficie (y que es igual, por otro lado, al triple del volumen del toro).

Ejemplo 2

Sea el campo

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx),$$



y el sólido Ω acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ sobre el plano $x - 3z = 0$. Para calcular el flujo de $\boldsymbol{F}$ a través de la frontera de Ω,

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S},$$

tendríamos que calcular *tres* integrales de superficie, respectivamente sobre la esfera, el cilindro y el plano. El teorema de Gauss nos permite resolver el problema calculando sólo una integral triple, lo que resultará menos farragoso. Tenemos:

$$div\boldsymbol{F} = y + z + x,$$

y cambiando a coordenadas cilíndricas,

$$\Omega^* = \left\{(r, \theta, z)\,\middle|\, 0 \le r \le 2,\, 0 \le \theta \le 2\pi,\, \frac{r\cos\theta}{3} \le z \le \sqrt{16 - r^2}\right\};$$

con lo que, recordando el jacobiano, puede completarse el cálculo:

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} div\boldsymbol{F}\, dV = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{r\cos\theta}{3}}^{\sqrt{16-r^2}} (r\cos\theta + r sen\theta + z) r\, dz\, d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\left(r^2(\cos\theta + sen\theta)\left(\sqrt{16 - r^2} - \frac{r\cos\theta}{3}\right) + r\left(\frac{16 - r^2}{2} - \frac{r^2\cos^2\theta}{18}\right)\right) d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\left(r^2(\cos\theta + sen\theta)\sqrt{16 - r^2} + 8r + r^3\left(-\frac{25}{36} - \frac{7\cos 2\theta}{36} - \frac{sen 2\theta}{6}\right)\right) d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^2 \left[r^2 (sen\theta - cos\theta)\sqrt{16-r^2} + 8r\theta + r^3 \left(-\frac{25}{36}\theta - \frac{7\,sen 2\theta}{72} + \frac{cos 2\theta}{12} \right) \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr =$$

$$= \int_0^2 \left(16\pi r - \frac{25\pi}{18} r^3 \right) dr = \left[8r^2 - \frac{25}{72} r^4 \right]_0^2 \pi = \frac{238}{9}\pi .$$

Bibliografía

Libros básicos:

S. Lang: *Cálculo II.* Fondo Educativo Interamericano, 1976.
R. E. Larson, R. P. Hostetler, B. H. Edwards: *Cálculo, 2.* McGraw-Hill, 1995.
J. E. Marsden, A. J. Tromba: *Cálculo vectorial.* Addison-Wesley Iberoamericana, 1991.

Otros libros:

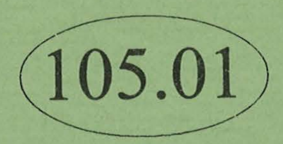
G. Chilov: *Fonctions de plusieurs variables reélles.* Mir, 1978.
J. Lelong-Ferrand, J.-M. Arnaudiès: *Équations différentielles, intégrales multiples.* Dunod, 974.

ÍNDICE

NOTAS

NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es

